ECOLE POLYTECHNIQUE — OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1979

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

Dans tout le problème, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des réels. Pour tout entier $k \geqslant 1$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction complexe f définie sur $\mathbb{R}$ et $f^{(0)}$ désigne f elle-même. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions complexes f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout couple $(h, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la fonction $x \longmapsto |x^h f^{(k)}(x)|$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

La partie II, sauf pour sa première question, est indépendante de la partie I.

I

1 - a) Montrer que $\mathcal{E}$ muni des opérations d'addition et de multiplication des fonctions et de la multiplication par les complexes est une algèbre sur le corps des complexes.

b) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente.

c) $\mathcal{E}$ étant également un espace vectoriel complexe, montrer que l'application définie pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ par

$$(f, g) \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx$$

est un produit scalaire hermitien sur cet espace vectoriel complexe.

On notera désormais $(f \mid g)$ l'intégrale précédente et $\|f\|$ la norme de f associée à ce produit scalaire. D'autre part, pour tout couple (U, V) d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, on notera UV l'endomorphisme composé $U \circ V$; pour tout entier $n \geqslant 1$, U^n désignera le composé de n endomorphismes égaux à U ; U^0 sera par convention égal à l'endomorphisme

.../...

identique I . Enfin, on appelle valeur propre de U tout nombre complexe λ tel que $U - \lambda I$ ne soit pas injectif, et fonction propre de U associée à λ tout élément du noyau de $U - \lambda I$.

2 - Pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose, avec $i^2 = -1$,

$$(A f)(x) = i f'(x) + i x f(x) \qquad (B f)(x) = i f'(x) - i x f(x)$$

$$(T f)(x) = - f''(x) + x^2 f(x) .$$

a) Montrer qu'on définit ainsi trois endomorphismes A, B, T de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

b) Trouver dans $\mathcal{E}$ les noyaux de A et de B .

c) Calculer A B et B A en fonction de T et de I . En déduire une relation linéaire entre A T - T A et A et une relation linéaire entre B T - T B et B .

d) Soit $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Comparer $(A f \mid g)$ et $(f \mid B g)$, puis $(T f \mid g)$ et $(f \mid Tg)$.

3 - a) Soit λ une valeur propre de T et f une fonction propre de T associée à λ . Etablir les égalités

$$\| A f \|^2 = (\lambda - 1) \| f \|^2 \qquad \| B f \|^2 = (\lambda + 1) \| f \|^2$$

$$TA f = (\lambda - 2) A f \qquad TB f = (\lambda + 2) B f$$

b) Montrer que les valeurs propres de T sont toutes réelles et que 1 est la plus petite d'entre elles. Quel est le noyau de T ? Déterminer les fonctions propres de T associées à la valeur propre 1 .

c) Montrer que toute valeur propre de T est un entier impair positif et que si f_n est une fonction propre de T associée à la valeur propre $\lambda_n = 2n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$ $A^n f_n$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1 .

d) Montrer réciproquement que tout entier impair positif est une valeur propre de T et que si f_0 est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1, $f_n = B^n f_0$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre $2n + 1$.

.../...

4 - Soit k un entier strictement positif.

a) Etablir l'égalité

$$B^k A^k = (AB - 2kI) B^{k-1} A^{k-1} .$$

b) Montrer que si f est une fonction propre de T, c'est aussi une fonction propre de $B^k A^k$.

c) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions propres de T associées à la valeur propre $2n + 1$? Comment ces fonctions propres se déduisent-elles des éléments du noyau de A ?

II

1 - Soit f_n une fonction propre différente de la constante nulle associée à la valeur propre $2n + 1$ de T ($n \in \mathbb{N}$).

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto e^{x^2/2} f_n(x)$ est un polynôme g_n de degré n et ayant la parité de n.

b) Montrer que la fonction $x \longmapsto e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ $(n \geqslant 1)$ est aussi un polynôme h_n de degré n. Comparer g_n et h_n en posant $h_0 = 1$.

2 - a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, les polynômes h_n vérifient la relation de récurrence

$$h_{n+1}(x) = -2x\, h_n(x) - 2n\, h_{n-1}(x)$$

pour tout x réel.

b) Le réel x étant fixé, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto e^{-t^2 - 2tx}$ est développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} k_n(x) \frac{t^n}{n!}$ convergeant pour tout $t \in \mathbb{R}$, et où les coefficients $k_n(x)$ sont les valeurs pour x de polynômes k_n de degré n.

c) Trouver une relation de récurrence entre k_{n+1}, k_n et k_{n-1} $(n \geqslant 1)$ et comparer h_n et k_n.

.../...

3 – a) On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ ($a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) de la variable réelle t, de rayon de convergence infini, et de somme $s(t)$. Montrer que pour toute application continue ψ du segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la série numérique

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n \psi(t)\, dt$ converge et a pour somme $\int_a^b s(t)\, \psi(t)\, dt$.

b) Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(t, x) = e^{-t^2 - 2tx}$.
Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle en tout point du complémentaire d'un intervalle $[a, b]$. Montrer que pour λ réel *strictement* positif la fonction θ_λ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\theta_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2} \int_a^b F(t\sqrt{\lambda},\ x\sqrt{\lambda})\, \varphi(t)\, dt$$

est développable en série entière de rayon de convergence infini.

4 – a) Montrer que pour tout $(\lambda, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$\sqrt{\lambda}\, \theta_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, \varphi\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} - x\right) ds \quad .$$

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout x réel on ait

$$\left| \sqrt{\lambda}\, \theta_\lambda(x) - \varphi(-x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds \right| \leq \varepsilon \quad .$$

5 – Soit $[c, d]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit Φ une application continue de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$. Déduire des résultats précédents que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [c, d]$, on ait $|\Phi(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail